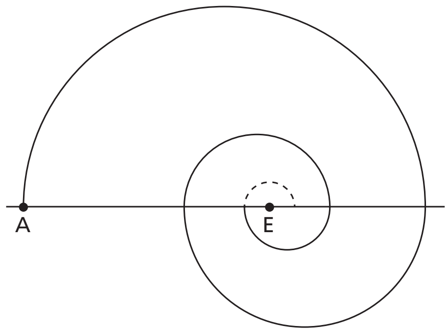
9 Una curva «a spirale» inizia nel punto A, come indicato in figura, ed è formata congiungendo un numero infinito di semicirconferenze di diametri sempre più piccoli. Il diametro d_1 della prima semicirconferenza è di 80 cm. Il diametro d_2 della seconda è pari ai $\frac{3}{5}$ di d_1. Il diametro d_3 della terza è pari ai $\frac{3}{5}$ di d_2, e così via: $d_{n+1} = \frac{3}{5} d_n$ per ogni n.

Con lo sviluppo della curva, gli estremi delle varie semicirconferenze tendono al cosiddetto «occhio» E della spirale (ossia l'unico punto contenuto in tutti i vari diametri).
Qual è la distanza (in linea retta) tra il punto A e il punto E?
E qual è la lunghezza del cammino che va da A a E, percorrendo l'intera curva?

Figura 2



9 Notiamo che i diametri delle semicirconferenze costituiscono una progressione geometrica di ragione $q = \frac{3}{5}$. Posto $d_1 = 80$ cm il diametro della prima semicirconferenza, per la seconda e la terza semicirconferenza i diametri risultano:

$$d_2 = d_1 \cdot \frac{3}{5} = 80 \cdot \frac{3}{5}\text{ cm} = 48\text{ cm},\quad d_3 = d_2 \cdot \frac{3}{5} = d_1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 80 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2\text{ cm} = 28{,}8\text{ cm}.$$

In generale sarà: $d_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \cdot d_1$.

Disegniamo la curva nel piano cartesiano e centriamo nell'origine la prima semicirconferenza di raggio 40 cm. La seconda circonferenza ha raggio $\frac{d_2}{2} = 24$ cm, centro nel punto $C_2(16;\, 0)$ e intersezione con l'asse x in $E_1(-8;\, 0)$.

La terza circonferenza ha raggio $\frac{d_3}{2} = 14{,}4$ cm, centro nel punto $C_3(6{,}4;\, 0)$ e intersezione con l'asse x nel punto $E_2(20{,}8;\, 0)$.

La distanza di $A(-40;\, 0)$ da $E_1(-8;\, 0)$, primo «occhio» della spirale, è 32 cm; la distanza di A dal punto E_2 si ottiene nel modo seguente:

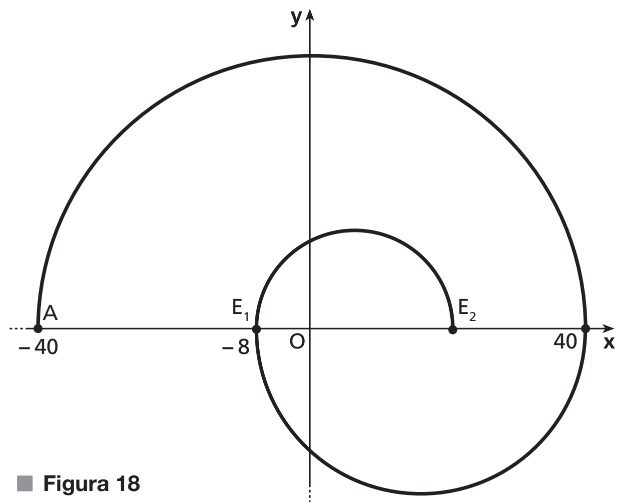


Figura 18

$$\overline{AE_2} = \overline{AE_1} + \overline{E_1E_2} = (d_1 - d_2) + d_3 = [(80 - 48) + 28{,}8]\text{ cm} = (32 + 28{,}8)\text{ cm} = 60{,}8\text{ cm}.$$

Generalizziamo il ragionamento e calcoliamo la distanza di A dal generico punto E_n:

$$\overline{AE_n} = \overline{AE_1} + \overline{E_1E_2} - \overline{E_2E_3} + \ldots + (-1)^n\,\overline{E_{n-1}E_n} = d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + \ldots + (-1)^n d_{n+1} =$$

$$d_1 - \frac{3}{5}d_1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 d_1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 d_1 + \ldots + (-1)^n \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n d_1 =$$

$$d_1\left[1 - \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \ldots + (-1)^n\left(\frac{3}{5}\right)^n\right].$$

Quindi $\overline{AE_n}$ è una somma i cui termini sono in progressione geometrica di ragione $q = -\frac{3}{5}$ e primo termine d_1. Passando al limite, otteniamo la distanza dal punto A al punto E, «occhio» della spirale, come serie geometrica:

$$\overline{AE} = \lim_{n\to+\infty}\overline{AE_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_1\left(-\frac{3}{5}\right)^n = d_1\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n = \frac{d_1}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)} = \left(\frac{80}{1+\frac{3}{5}}\right)\text{cm} = \frac{80}{\frac{8}{5}} = 50\text{ cm}.$$

Quindi, $\overline{AE} = 50$ cm.

Calcoliamo la lunghezza L della curva, muovendoci dal punto A al punto E. Ogni tratto di tale curva è una semicirconferenza di lunghezza $\pi r = \frac{\pi}{2}d$.

Indichiamo con $L_n = \frac{\pi}{2} d_n$ la lunghezza della semicirconferenza generica e otteniamo:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \ldots + L_n + \ldots = \frac{\pi}{2} d_1 + \frac{\pi}{2} d_2 + \frac{\pi}{2} d_3 + \ldots + \frac{\pi}{2} d_n + \ldots =$$

$$\frac{\pi}{2} d_1 + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{5} d_1 + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 d_1 + \ldots + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n d_1 + \ldots =$$

$$\frac{\pi}{2} d_1 \left[1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{5}\right)^n + \ldots\right].$$

Quindi, L è la somma della serie geometrica di ragione $\frac{3}{5}$ e primo termine 40π e vale:

$$L = 40\pi \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 40\pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = 40\pi \cdot \frac{1}{\frac{2}{5}} = 100\pi \text{ cm}.$$